

朝花夕拾（第二卷）—6

结构整体稳定分析的几点问题探讨

§ 1 前言

对于较复杂或特殊的空间结构，通常需要做整体稳定分析，它可以深入了解结构的受力特性，是对构件按规范校核的必要补充。对于整体稳定分析，一个结构工程师应该理解基本概念，掌握分析方法，了解分析要点。

整体稳定分析有两种方法：线性的屈曲（buckling）分析；非线性的静力分析，它可以包含几何非线性和材料非线性。前者用于查看结构的非保守屈曲荷载因子和屈曲模态；后者用于查看结构在数倍荷载下工作特性。从有限元分析的角度来说它们是截然不同的两种方法。

记得自己 5~6 年前刚在一个项目中接触到它，还太不懂就向一个同学吹嘘，结果被同学一个“稳定是什么？”问卡了。当时就是把两种分析方法混淆了，稀里糊涂，不明所以，想来真是惭愧之极。

虽然自己做整体稳定分析多年，计算的项目也不少，但是一些概念和分析要点到最近才基本弄清。本笔记不全面介绍整体稳定分析的概念，只是以书信的形式反映我向同学，友人，老师的请教过程，厘清几个分析要点。当然他们全是我的老师，就以“老师 1”、“老师 2”和“老师 3”代称。这三个优秀的老师均是钢结构专业博士以上学历，我也为能有机会向他们请教而庆幸。

§ 2 我的请教信

老师 1、老师 2、老师 3 您好：

我在最近的项目中遇到一些关于整体稳定分析的问题，请您赐教，问题如下。

项目是 Nigeria (Abuja) Cultural Center 的屋顶钢结构，整体稳定的研究对象是三角形屋面中部核心区三角形穹顶（dome）钢结构。该穹顶采用三向局部交叉的拱支网壳结构；拱平面外法线方向采用刚性压杆、双斜向采用张紧的柔性拉索共同保持整体稳定。同时为了提高穹顶的整体刚度，有 6 根拱在 dome 外侧加撑杆和拉索，加强成索拱体系。整体结构如下图 image1，局部穹顶结构如下图 image2。

但是关于网壳整体稳定的一些问题，相关文献和规范、规程都阐述得不太清楚，所以我想向您请教如下四个问题：

- 1、请问这样的 dome 结构，考虑几何非线性，不考虑初始缺陷，不考虑塑性的最小控制荷载因子（load factor）应该取多少合适？确定荷载因子都依据哪些具体原则？
- 2、buckling 的荷载组合是基本组合还是标准组合，即是不是需要包含荷载项系数？
- 3、buckling 的荷载组合中自重荷载（标准值）是永远取 1.0，还是随荷载因子一起增加？
- 4、buckling 的荷载组合需要包含温度荷载吗？

朝花夕拾（第二卷）—6

结构整体稳定分析的几点问题探讨

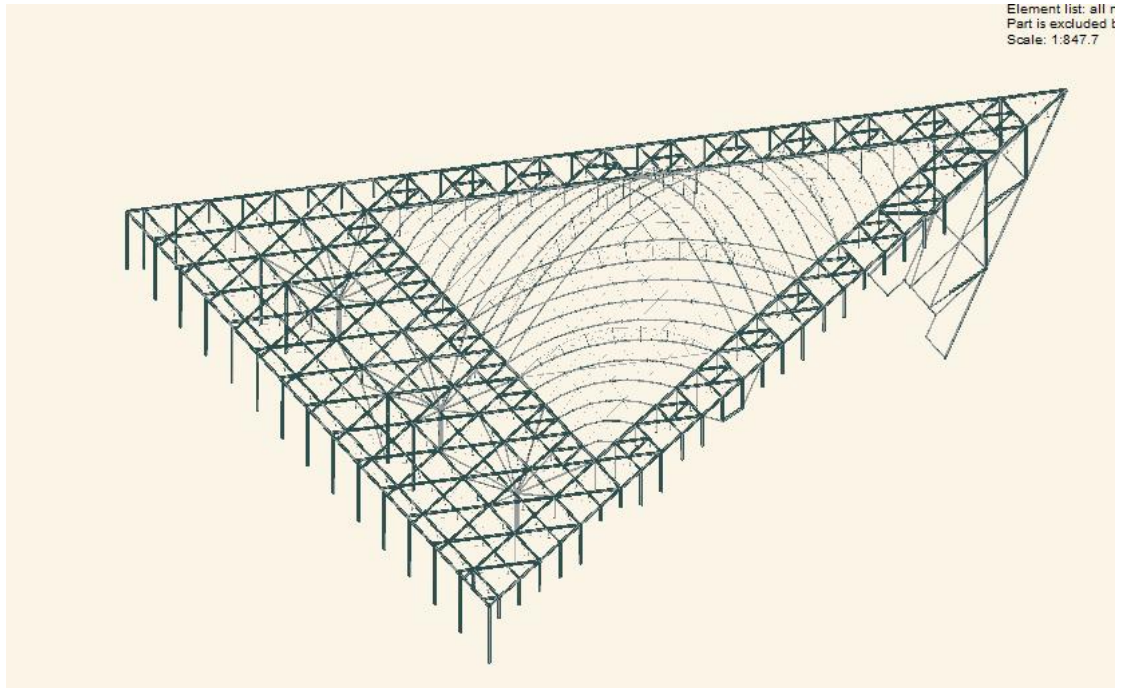


Image1

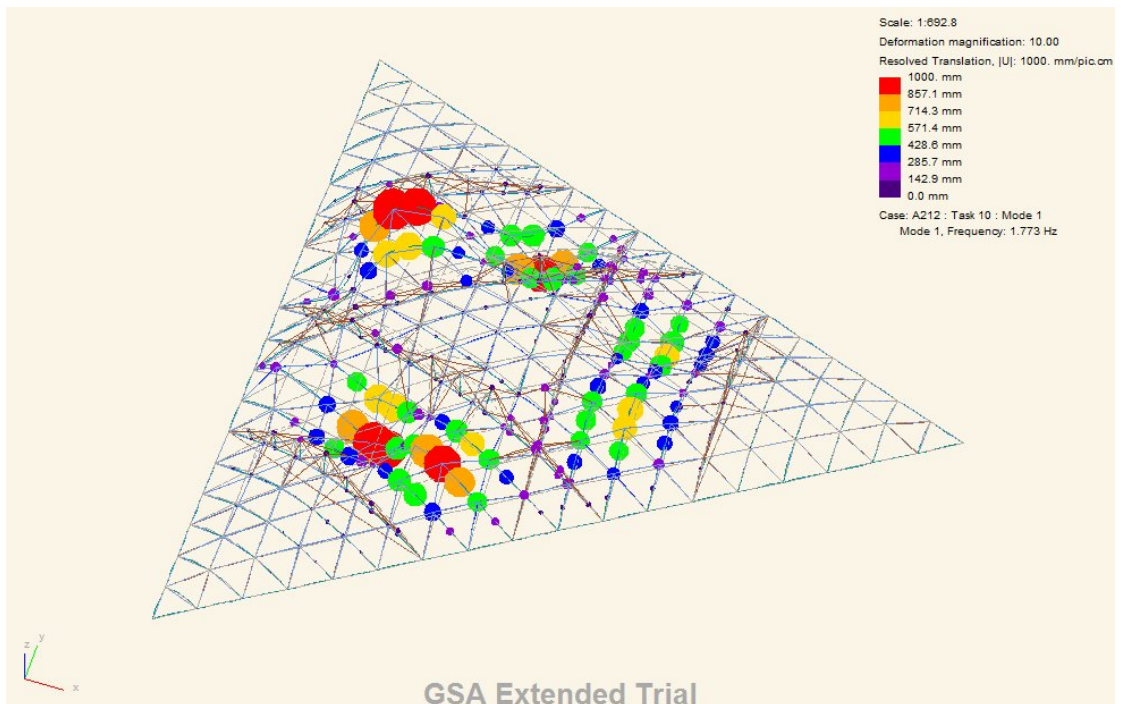


Image2

朝花夕拾（第二卷）—6

结构整体稳定分析的几点问题探讨

§3 老师1的回信1

这几个问题我以前有过接触，但没这么仔细的思考过，有一些不成熟的想法，仅供参考。

1. 关于屈曲问题的基本概念

屈曲的本质：荷载增大到某值时，轴向压力的作用使空间结构曲面外的刚度降低为零时，结构屈曲。结构的屈曲分析可分为特征值屈曲分析和非线性屈曲分析，非线性屈曲又可分为分支型屈曲和极值型屈曲。特征值屈曲分析主要是以结构的初始构型为参考构型，以小位移线性理论为基础的求解方法。非线性屈曲通过跟踪荷载-位移全过程曲线确定，具有分枝屈曲特点的结构通常在全程分析中施加扰动以实现平衡路径的转换。

2. 问题 1：请问这样的 dome 结构，考虑几何非线性，不考虑初始缺陷，不考虑塑性的最小控制荷载因子（load factor）应该取多少合适？确定荷载因子都依据哪些具体原则？

图中结构考虑几何非线性，应该是非线性屈曲分析问题。

对于分支型屈曲，要确定非线性屈曲分析的荷载因子，通常是先进行特征值屈曲分析，求出荷载因子的上限，同时也能求出低阶的屈曲模态。沈士钊《网壳的稳定》书中指出结构按最低阶屈曲模态变形将处于势能最小状态，因此可取初始扰动与特征值屈曲分析最低阶模态一致，在接近临界状态加入微小的扰动可实现分支型屈曲临界荷载的求解。我用 ANSYS 算过几何非线性分支型屈曲问题，是在初始状态就给定微小的屈曲模态变形，还是可以实现分支屈曲的。

对于极值型屈曲，现有程序很难跟踪出下降段，因此通常把计算不收敛时的荷载作为极限荷载。此外，对于曲面外刚度较大的结构，不考虑塑性的极限荷载通常要比实际的极限荷载高出好多，这时算弹塑性极限承载力比较接近实际情况。

确定荷载因子都依据哪些具体原则这个问题我也回答不上来，可能是需要自己主管判断的成分更大吧。

3. 问题 2：buckling 的荷载组合是基本组合还是标准组合，即是不是需要包含荷载项系数？

从结构设计角度讲，失稳问题属于承载能力极限状态问题，结构计算时用到的是设计值，应该用基本组合。但是如果只计算几何非线性的屈曲问题，由此方法确定的极限荷载并非结构实际极限状态的荷载，用基本组合和标准组合都不能准确确定结构的极限承载力，因此我认为计算时只要将荷载和材料强度的取值统一起来就可以。

4. 问题 3：buckling 的荷载组合中自重荷载（标准值）是永远取 1.0，还是随荷载因子一起增加？

在 ANSYS 中，自重荷载是随荷载因子一起增加的，计算时需要自己调整；但 SAP 中自重荷载好像是恒定的，所以这个问题应该取决于程序编制过程中是怎样处理的吧，如果你是用程序求解的话，应该详细看看所用程序具体是怎样解决这个问题的！

5. 问题 4：buckling 的荷载组合需要包含温度荷载吗？

道理上讲，只要外部作用使结构受压，结构就有发生屈曲的趋势，因此荷载因子应包括温度荷载；但

朝花夕拾（第二卷）—6

结构整体稳定分析的几点问题探讨

在实际应用中，所设计的结构所在环境基本固定，而且把温度和荷载放在一起很难分清楚荷载增大到什么程度结构会屈曲，我觉得在结构屈曲分析时不必考虑温度作用。你可以用温度单独作用，算算结构的特征值屈曲，看看与荷载作用的特征值屈曲有何不同，荷载因子相差多大。

严格的讲我没有正面回答你提出的几个问题，目前还没有确定的答案，你看看哪些地方有争议，咱们再探讨探讨。

§4 老师2的回信

你好！对你的上述问题，我的理解如下：

由于稳定分析是针对结构承载能力极限状态的考察，一般情况下对各荷载工况应采用基本组合。不过用什么组合最终还决定于你分析的目的、意义所在。对其中是否要包含温度工况即应如此理解。如你认为温度作用会成倍增长，或需特别考察温度工况对结构的作用效果等，即可包含。不过我做过的一些实际工程都没考虑这种情形。

屈曲分析时，自重作为恒载作用之一，最好能从结构恒载作用的实际意义上区别于其它活载作用，如分析中恒载保持不变、变动的只是活载屈曲系数等。不同的程序，其这类屈曲分析的定义与理解似乎不尽一致。MIDAS 中可方便的进行约定（如是保持恒载（包括自重）不变，还是考虑所有荷载（包括自重）一起变动等）。从结构稳定分析本身理解，自重保持不变的分析更有实际意义。但 ANSYS（好像 SAP 也如此）的屈曲分析中自重随其他荷载作用一同变化（有没有其它更聪明的方法可以分开考虑就不清楚了），可通过预先调整其重力加速度（或密度）乘屈曲因子的倒数进行分析，最后屈曲状态下的结构自重即会基本保持为初始状态；其它不想变化的荷载可类似处理。至于你用的程序是什么情形，最好用小模型先试一试。

考虑几何非线性时屈曲临界荷载因子要达到多大，好像没有什么特别的说法。屈曲系数的大小反映了结构某种荷载工况下的稳定承载能力储备水平，不同的结构形式、刚度分配与受力情况应区别对待。如恒加活、恒加风等常见的情况下，屈曲系数越大越好，结构的刚度、稳定性安全储备好。一般结构在上述常见荷载情形下的屈曲系数通常尽量能在 3 以上（保守的工程经常是 10 倍左右，如广州火车站扩初设计几何非线性稳定分析恒载作用下的屈曲系数为 11.9，半跨活载作用下的屈曲系数为 10.1）。太保守的屈曲系数会造成结构体系不必要的浪费。

§5 老师1的回信2

你好！看了老师2对问题的解释，说得很有道理，就这几个问题再作一点补充。

结构设计是从安全系数法发展到概率极限状态设计方法的，在目前的阶段只能算是半概率方法，有些问题（如疲劳）仍在用允许应力的形式表示。

对于稳定问题，结构设计定义为承载能力极限状态，所以我们计算应该用基本组合，但也有的研究用安全系数法，就像你朋友说的，此时要取一个很大的安全系数。基本组合的荷载因子超过 3，标准组合的荷载因子超过 5，起码是这样的设计心理才能踏实些吧。

朝花夕拾（第二卷）—6

结构整体稳定分析的几点问题探讨

至于达到多少算是安全的，文献中未见提及，所以你算算有初始缺陷的结构弹塑性极限承载力，看看安全储备，做个比较这样更保险吧。

自重为恒定荷载，在求荷载因子时，应使其保持不变。至于温度问题，我同意你的说法，它对结构的稳定起作用，应该考虑，在处理该问题时，能不能像自重那样，将温度最大值作用于结构，令其恒定，然后再求荷载因子，毕竟几倍的温度作用于结构并非符合实际情况。

如果不能确定，就对可能出现的工况逐一计算，取最不利情况作为依据吧！

§6 老师3的回信

1. 问题 1: 请问这样的 dome 结构，考虑几何非线性，不考虑初始缺陷，不考虑塑性的最小控制荷载因子 (load factor) 应该取多少合适？确定荷载因子都依据哪些具体原则？

回答：这个问题很难给出具体答案。

确定荷载因子依据的具体原则主要包括：结构的重要性、结构稳定性对缺陷（初始几何缺陷、初应力、荷载分布的变化性等）的敏感程度、失稳时塑性深入程度等。

对网壳结构，新的建设部行业规程《空间网格结构技术规程》（送审稿）建议：考虑初始几何缺陷的影响，按弹性分析得到的极限承载力，荷载因子 K 取 4.2；按弹塑性分析得到的极限承载力，荷载因子 K 取 2.0。其中，初始缺陷的考虑可采用结构最低屈曲模态作为初始缺陷的分布模态，其最大计算值可按网壳跨度的 1/300 考虑。

如不考虑考虑初始几何缺陷的影响，按老的网壳规程，荷载因子要加倍。如果能够知道该结构对初始几何缺陷不敏感，荷载因子增大 30% 左右就可以了。

在德国的工程，最好问一下德国的工程师，因为上面的考虑我觉得还是较保守的。

2. buckling 的荷载组合是基本组合还是标准组合，即是不是需要包含荷载项系数？

回答：稳定分析是极限承载力分析，应该是基本组合，即考虑荷载的分项系数。

3. buckling 的荷载组合中自重荷载（标准值）是永远取 1.0，还是随荷载因子一起增加？

回答：随荷载因子一起增加。因为我们目前的稳定分析是考虑结构在荷载设计值水平的安全储备，而不是考虑能构承受多少倍的活载设计值。

4. buckling 的荷载组合需要包含温度荷载吗？

回答：一般不考虑，特别是对单层的壳体结构。

朝花夕拾（第二卷）—6

结构整体稳定分析的几点问题探讨

§ 7 部分网友的回复

我将该问题也贴在网上，见：<http://okok.org/forum/viewthread.php?tid=176899&extra=page%3D1> 不少网友热烈回复。不过大家意见不一，我将认可的精华部分摘录如下：

荷载因子要取一个合理的值，根据 MTnergr 教授 DIN18800 BLF 建议值 2.5，笔者认为主要是基于德国的工业特别发达，设计和建造，监理等世界一流。而根据法国 standards French CM66/Add80 and NFP. 荷载因子给出了 5.0（线性），如下图：



- All design checks are done for a single beam. (Numerous examples to determine the buckling length)
- Factors for the stresses depending on the slenderness
$$k_1 \sigma + k_f \sigma_f \leq \sigma_e$$
 (Index f for flexion)
- Similar formulas for lateral torsional buckling defined. [Déversement en flexion simple et flexion composée]

In Additif 80:

- A load factor α_{cr} of the buckling load is introduced.
- For $\alpha_{cr} > 5$ linear theory is sufficient.
- For $\alpha_{cr} < 5$ load factors and limits for the rotation for columns are given.

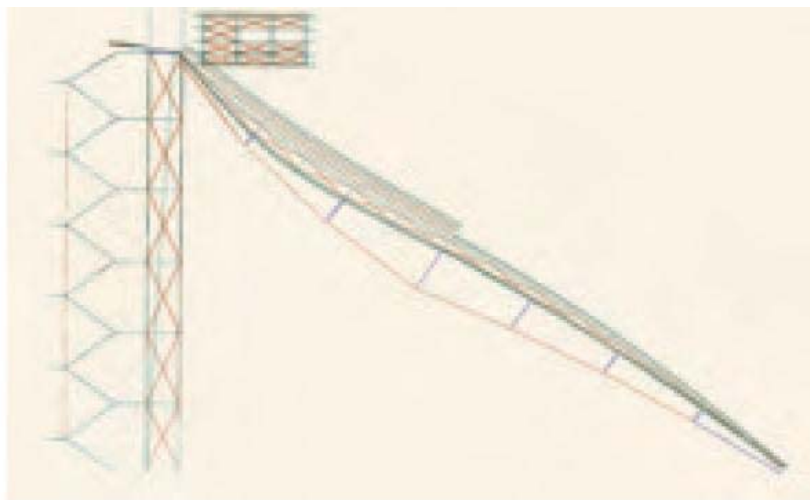


- The customer wants a product which has assured properties even if he does not exactly know about them
- The safety requirements of the public has to be fulfilled
- Thus a design code may contain:
 - Clear technical definitions especially of required material properties and tests
 - General guidelines for the design
 - Hints for comprehensive design methods
 - Simplified design methods

朝花夕拾（第二卷）—6

结构整体稳定分析的几点问题探讨

温度影响比较敏感的结构，必须考虑，一般升温起决定作用。此项目为 Arup 设计。



6. Buckling shape from GSA analysis.

For the edge members of the trussed girder, GSA buckling analyses were performed to determine the most adverse combination of loads for stability (Fig 6). The critical combination comprised dead, imposed, snow, and ice loads, wind longitudinal to the in-run, and temperature. The modal displacements from the lowest mode are scaled so that the value w_0 of the imperfect shape accords with *DIN18800-2*. This imperfect shape is used for a subsequent second-order analysis.

§ 8 掩信而思及其他问题

1. 整体稳定下降区段的计算问题

对于极值点失稳，一些程序如 OASYS GSA 不能计算出极值点失稳的下降区段，原因是它们只使用 New-Raphson 系列方法，不使用弧长法。MIDAS 也能计算下降区段，但是很不好用。SAP2000 我见过能方便计算出下降区段的例子。而 ANSYS 如果控制好弧长参数，一般是可以计算出下降区段的。SAP2000 的例子参见《SAP2000 中文版使用指南》的例题 18.3.2, page 445, 人民交通出版社 2006 年 9 月版。

注：OASYS GSA 是英国 ARUP 结构顾问公司编写的结构计算软件，在 ARUP 全世界子公司和欧洲其他一些结构公司广泛使用。

2. 温度作用的取舍

朝花夕拾（第二卷）—6

结构整体稳定分析的几点问题探讨

温度作用是一个边缘性的问题，我个人以为不能随便忽略，因为有时它会极大增加构件的轴向压力，对稳定有着不可忽视的影响。当然荷载因子的本质问题还是可靠度，因为依从了不同结构的自身复杂特性，从变也得复杂起来。

3. 稳定分析的三个层面

稳定分析有三个层面：①构件板件的稳定分析，如腹板的屈曲；②构件的稳定分析，一般可以按规范校核，考虑 P- Δ 效应；③整体稳定分析，如本笔记所讨论。这三个层面的分析不可互相混淆，不能互相代替。

我发现国外一些工程师（including some senior engineers）有使用整体稳定分析代替构件稳定分析的倾向，尤其是在主要做标图的结构顾问公司。虽然觉得这在概念上很有问题，但我一时又很难有力、深刻地反驳，毕竟第 2、3 层面还是有者紧密的联系。

我也见过别人使用 P- Δ 分析代替构件稳定分析的例子（结果比较离散，吻合度不好），从概念上讲这种方法是正确的，吻合度不好恐怕是因为规范公式和系数本身就是拟合的。我一直不太懂 P- Δ 分析和几何非线性分析的联系和区别，尤其是在有限元分析层面上。

4. ANSYS 整体稳定分析的几个雷区

A) 我听别人说，对于分支点失稳尤其多分支的情况，由于计算步长的原因，ANSYS 的几何非线性整体稳定分析可能会漏掉少许分支。

B) ANSYS 的线性屈曲（buckling, 特征值）分析需要先打开 PSTRES 开关，进行静力分析以获取几何刚度矩阵。对于结构中有索（LINK10）而又未施加预应力的情况，可能会遗漏掉一些索的几何刚度，影响线性屈曲分析的结果。解决的办法是静力分析时施加很小的预紧力使索张紧，以获取其几何刚度。

C) 一般来说，线性屈曲分析的一阶荷载因子要比非线性静力分析的荷载因子大，但最近我发现有相反的情况。在对两种分析一个个检查了单项工况后，排除了遗漏结构几何刚度的可能，我发现由于结构布置的特殊性，结构永远不会在重力工况下屈曲，除非引入材料非线性。这种情况值得警惕。

于 2007-12-06 日子夜 图司小居

Concepts of Buckling

Draft 1, 10/23/06

Introduction

There are two major categories leading to the failure of a mechanical component: material failure and structural instability, which is often called buckling. For material failures you need to consider the yield stress for ductile materials and the ultimate stress for brittle materials. Those material properties are determined by axial tension tests and axial compression tests of short columns of the material (see Figure 1). The geometry of such test specimens has been standardized. Thus, geometry is not specifically addressed in defining material properties, such as yield stress. Geometry enters the problem of determining material failure only indirectly as the stresses are calculated by analytic or numerical methods.

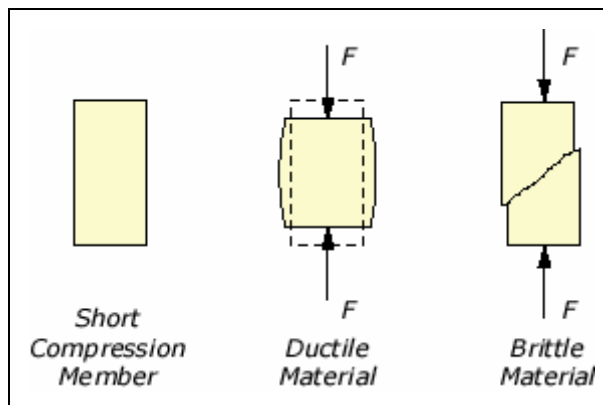


Figure 1

Predicting material failure may be accomplished using linear finite element analysis. That is, by solving a linear algebraic system for the unknown displacements, $\mathbf{K} \boldsymbol{\delta} = \mathbf{F}$. The strains and corresponding stresses obtained from this analysis are compared to design stress (or strain) allowables everywhere within the component. If the finite element solution indicates regions where these allowables are exceeded, it is assumed that material failure has occurred.

The load at which buckling occurs depends on the stiffness of a component, not upon the strength of its materials. Buckling refers to the loss of stability of a component and is usually independent of material strength. This loss of stability usually occurs within the elastic range of the material. The two phenomenon are governed by different differential equations. Buckling failure is primarily characterized by a loss of structural stiffness and is not modeled by the usual linear finite element analysis, but by a finite element eigenvalue-eigenvector solution, $|\mathbf{K} + \lambda_m \mathbf{K}_F| \boldsymbol{\delta}_m = 0$, where λ_m is the buckling load factor (BLF) for the m -th mode, \mathbf{K}_F is the additional “geometric stiffness” due to the stresses caused by the loading, \mathbf{F} , and $\boldsymbol{\delta}_m$ is the associated buckling displacement shape for the m -th mode. The spatial distribution of the

load is important, but its relative magnitude is not. The buckling calculation gives a multiplier that scales the magnitude to that required to cause buckling.

Slender or thin-walled components under compressive stress are susceptible to buckling. Most people have observed what is called “Euler buckling” where a long slender member subject to a compressive force moves lateral to the direction of that force, as illustrated in Figure 2. The force, F , necessary to cause such a buckling motion will vary by a factor of four depending only on how the two ends are restrained. Therefore, buckling studies are much more sensitive to the component restraints than in a normal stress analysis. The theoretical Euler solution will lead to infinite forces in very short columns, and that clearly exceeds the allowed material stress. Thus in practice, Euler column buckling can only be applied in certain regions and empirical transition equations are required for intermediate length columns. For very long columns the loss of stiffness occurs at stresses far below the material failure.

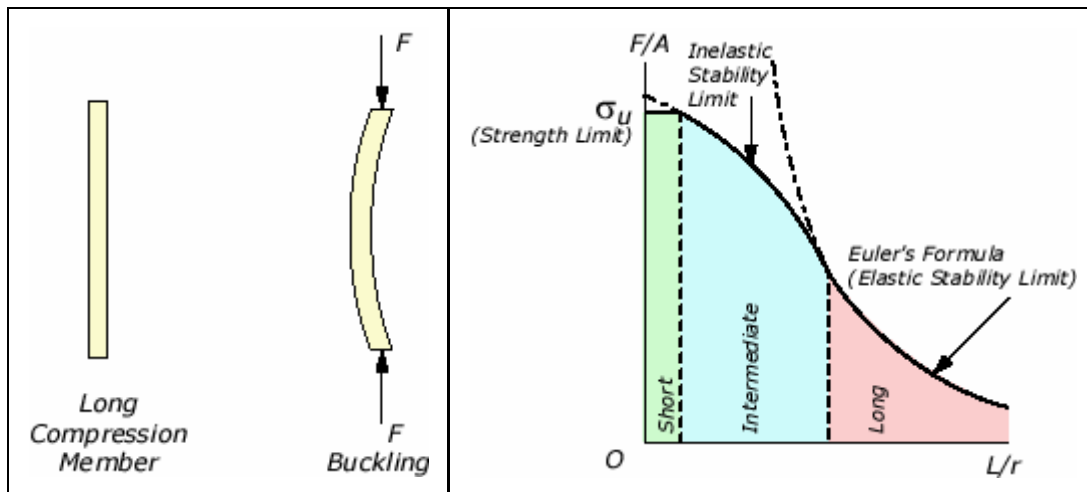


Figure 2

There are many analytic solutions for idealized components having elastic instability. About 75 of the most common cases are tabulated in the classic reference “Roark’s Formulas for Stress and Strain” [1, 2, 3].

Buckling terminology

The topic of buckling is still unclear because the keywords of “stiffness”, “long” and “slender” have not been quantified. Most of those concepts were developed historically from 1D studies. You need to understand those terms even though finite element analysis lets you conduct buckling studies in 1D, 2D, and 3D. For a material, stiffness refers to either its elastic modulus, E , or to its shear modulus, $G = E / (2 + 2 \nu)$ where ν is Poisson’s ratio.

Slender is a geometric concept of a two-dimensional area that is quantified by the radius of gyration. The radius of gyration, r , has the units of length and describes the way in which the area of a cross-section is distributed around its centroidal axis. If the area is concentrated far from the centroidal axis it will have a greater value of r and a greater resistance to buckling.

A non-circular cross-section will have two values for its radius of gyration. The section tends to buckle around the axis with the smallest value. The radius of gyration is defined as:

$$r = \sqrt{I / A},$$

where r = radius of gyration, I = area moment of inertia, and A = area of the cross-section. For a circle of radius R , $r = R / 2$. For a rectangle of large length R and small length b you obtain $r_{\max} = R / 2\sqrt{3} = 0.29 R$ and $r_{\min} = 0.29 b$. Solids can have regions that are slender, and if they carry compressive stresses a buckling study is justified.

Long is also a geometric concept that is quantified by the non-dimensional “slenderness ratio” L / r , where L denotes the length of the component. From experiments, the slenderness ratio of 120 is generally considered as the dividing point between long (Euler) columns (> 120) and intermediate (empirical) columns. The critical compressive stress that will cause buckling always decreases as the slenderness ratio increases.

Other 1D concepts that relate to stiffness are: axial stiffness, $E A / L$, flexural (bending) stiffness, $E I / L$, and torsional stiffness, $G J / L$, where J is the polar moment of inertia of the cross-sectional area ($J = I_z = I_x + I_y$). Today, stiffness usually refers to the finite element stiffness matrix, which can include all of the above stiffness terms plus general solid or shell stiffness contributions. Analytic buckling studies identify additional classes of instability besides Euler buckling. They include lateral buckling, torsional buckling, and other buckling modes (see Figure 3). A finite element buckling study determines the lowest buckling factors and their corresponding displacement modes. The amplitude of a buckling displacement mode, $|\delta_m|$, is arbitrary and not useful, but the shape of the mode can suggest whether lateral, torsional, or other behavior is governing the buckling response of design.

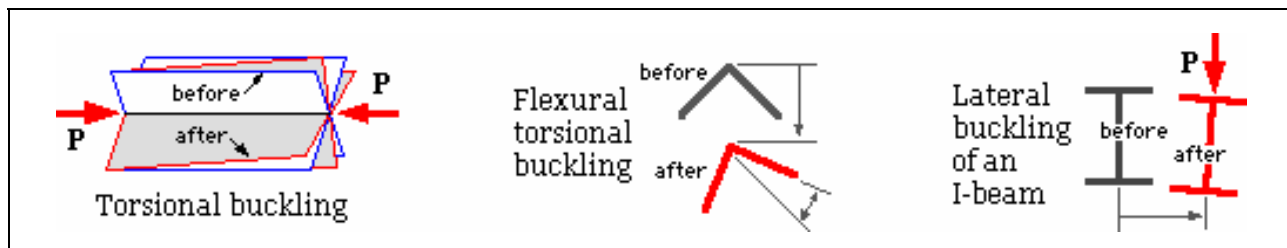


Figure 3

Buckling Load Factor

The buckling load factor (BLF) is an indicator of the factor of safety against buckling or the ratio of the buckling loads to the currently applied loads. Table 1 illustrates the interpretation of possible BLF values returned by CosmosWorks. Since buckling often leads to bad or even catastrophic results, you should utilize a high factor of safety (FOS) for buckling loads. That is, the value of unity in Table 1 should be replaced with the FOS value.

The BLF can be quite sensitive to geometrical imperfections in the part. If buckling is a concern you should try introducing slight changes, like a dent in a thin section, to see what

effect it would have. If you are using symmetry in your stress analysis model you may miss an important buckling load if you just use symmetry in the buckling study. Thus, after completing the symmetry buckling load factor calculation you should repeat the study by replacing the symmetry restraint with an anti-symmetry restraint.

Table 1 Interpretation of the Buckling Load Factor (BLF)

BLF Value	Buckling Status	Remarks
$0 < \text{BLF} < 1$	Buckling predicted	The applied loads exceed the estimated critical loads. Buckling will occur.
$\text{BLF} = 1$	Buckling predicted	The applied loads are exactly equal to the critical loads. Buckling is expected.
$-1 < \text{BLF} < 0$	Buckling possible	Buckling is predicted if you reverse the load directions.
$\text{BLF} = -1$	Buckling possible	Buckling is expected if you reverse the load directions.
$1 < \text{BLF}$	Buckling not predicted	The applied loads are less than the estimated critical loads.
$\text{BLF} < -1$	Buckling not predicted	The applied loads are less than the estimated critical loads, even if you reverse their directions.

References

1. W.C. Young, R.G. Budynas, *Roark's Formulas for Stress and Strain*, 7-th Ed., Mc Graw-Hill, 2002.
2. W.C. Young, R.G. Budynas, *Roark and Young on TK*, Universal Technical Systems Rockford, IL, 2002. (All 1400 design cases and 5000 equations are available with TK Solver.)
3. W.C. Young, R.G. Budynas, *Roark's Formulas on Excel*, Universal Technical Systems Rockford, IL, 2005.
4. H. Ziegler, *Principles of Structural Stability*, Gill-Blaisdell, Waltham, MA, 1968.